Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Enero–Marzo 2011

Nombre: ______________________________

Carné: ________________ Sección: ______

2do. Parcial de Matemáticas VII. Bloque C (1:30 PM)

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R},\ c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
(La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso)

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(cx)$	$\frac{1}{c}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$
$f_{\text{gen}}^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}_{\text{gen}}^{(n)}(\omega)$
e^{-cx^2}	$\frac{1}{\sqrt{4\pi c}}e^{-\omega^2/4c}$

$\frac{1}{c^2+x^2}$	$\frac{1}{2c}e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$\frac{c}{\pi(c^2+\omega^2)}$
$\frac{\operatorname{sen} cx}{x}$	$\frac{1}{2}1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$\frac{\operatorname{sen} c\omega}{\pi\omega}$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{2\pi}$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,x$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\,\omega$
$\mathcal{F}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

---

1. (12 ptos.) Considere la función 2π-periódica $f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ \text{Si } -\pi < x < 0 \\ 1 & ;\ \text{Si } 0 < x < \pi \end{cases}$

   (a) Obtenga la serie de Fourier trigonométrica de f.

   (b) Calcule el valor al cual converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

   (c) Calcule el valor al cual converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}$.

2. (8 ptos.) Calcule la transformada de Fourier de $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.

3. (15 ptos.) Resuelva la ecuación de calor

$$U_t = U_{xx}, \qquad U = U(x,t),\ 0 \le x < \pi,\ t > 0$$

   que satisface las condiciones

$$U(0,t) = U(\pi,t) = 0,\ t > 0$$
$$U(x,0) = \operatorname{sen}^3(x) \text{ en } 0 < x < \pi.$$

4. (15 ptos.) Encuentre la función acotada $U(x,y)$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0,\ y > 0\}$ tal que $U_{xx} + U_{yy} = 0$ en $\mathcal{R}$ con $\begin{cases} U_x(0,y) = 0 & ,\quad y > 0 \\ U(x,0) = e^{-x/2} & ,\quad x > 0. \end{cases}$